

**ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS**  
**DE SECCION VARIABLE,**  
**(Marcos de varios pisos con reticula ortogonal)**  
**POR EL METODO DE DISTRIBUCION DE MOMENTOS**

Por

Ing. José Castro Vargas

Ingeniero Civil

**RESUMEN**

Estudio de los orígenes de la Distribución de Momentos y sus aplicaciones a casos especiales, donde se puede obtener una convergencia de un ciclo, a través de la preparación de soluciones directas por medio de fórmulas algebraicas de los momentos finales, debidos a cargas verticales para estructuras de un piso sin movimiento lateral.

Se resuelve al final del texto un problema típico que aparece en la referencia # 1, páginas 201 y 202 (viga continua de sección variable parabólica - tres luces).

**INTRODUCCION**

El análisis de estructuras indeterminadas es en sí un campo muy amplio. Por eso se ha limitado el presente trabajo a los "Marcos de varios pisos con reticula ortogonal", analizados por distribución de momentos.

Dependiendo de que la estructura tenga restricción de movimiento lateral o que tenga libertad de movimiento lateral, dividiremos los marcos así :

**Marcos con Movimiento Lateral Prevenido :**

1. Marcos de varios pisos y varios vanos o luces.
2. Marcos de un piso y varios vanos o luces.

**Marcos con Movimiento Lateral Libre :**

3. Marcos con varios pisos y varios vanos o luces.
4. Marcos con varios pisos y un vano ó luz (simétricos) o (asimétricos).

El ejemplo resuelto al final del texto corresponde al tipo 2 (superestructura de puente con 3 luces, con movimiento lateral prevenido).

**ORIGENES DE LA DISTRIBUCION (ELASTICA) DE MOMENTOS\***

Como método para el análisis y diseño de estructuras de juntas rígidas, la "DISTRIBUCION DE MOMENTOS" fue introducida por el profesor Hardy Cross, (U.S.A.), en el año 1932. (Prefacio de la referencia #7).

Wang Ch. (referencia #10, página 216), -traducción libre- establece que la

distribución de momentos, "esencialmente consiste en resolver las ecuaciones del método de "slope deflection" por sucesivas aproximaciones".

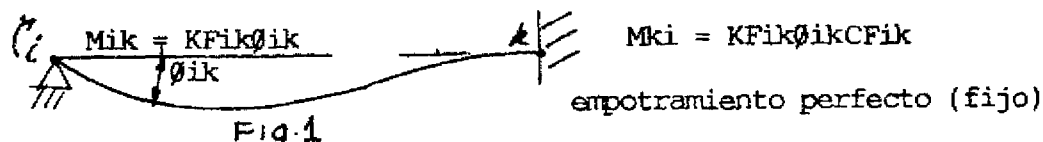
En cuanto al método de "Slope deflection", Kinney J.S. (Referencia #6, página 529), dice que "Axel Bendixen, en un libro publicado en Berlín en 1914, presentó el método en mayor detalle, (que O. Mohr en 1892) y un año después, en 1915, el profesor G.A. Maney, de la Universidad de Minnesota publicó su desarrollo del método.

### DEFINICIONES DE TERMINOS

Kinney, J.S. (Referencia #6, página 34), define : "Rigidez absoluta es el valor del momento, aplicado en un extremo simplemente apoyado de un miembro, necesario para producir la rotación de 1 radián en este extremo simplemente apoyado, no permitiéndose traslación de ninguno de los extremos, siendo el extremo más alejado simplemente apoyado, restringido o fijo".

También, Kinney (misma referencia anterior, página 345) define el factor de transporte o factor de inducción así : El factor de transporte es el factor por el cual debe multiplicarse el momento desarrollado en el extremo girado (siendo el otro extremo fijo o restringido) para dar el momento inducido en el extremo fijo o restringido".

Para el caso de apoyo lejano fijo tenemos :



$K_{fik} = k_{fik} E I_{mín}/L =$  rigidez absoluta

$k_{fik} =$  factor de rigidez

Si el ángulo  $\theta_{ik}$  en figura 1 es 1 radián, el momento aplicado en  $i_k$  es  $K_{fik}$  definido como la rigidez absoluta de apoyo lejano fijo. Asimismo  $C_{fik}$  sería el factor de inducción de apoyo lejano fijo.

En la referencia #2 (J. Castro - Apuntes Estructurales -1975/1988-Inédito), hay un estudio y metodología para el cálculo de factores de rigidez de extremo lejano fijo y factores de inducción de extremo lejano fijo para una variedad de secciones como las de la referencia #9.

### ECUACIONES DEL METODO DE "SLOPE DEFLECTION" (Estructuras sin movimiento lateral)

1.  $M_{ik} = M_{fik} + K_{fik}\theta_{ik} + K_{fki}\theta_{ki}C_{fki}$
2.  $M_{ki} = M_{fki} + K_{fki}\theta_{ki} + K_{fik}\theta_{ik}C_{fik}$

---

\*NOTA : En referencia #7 (Páginas 337 a 346), se habla de la Distribución Plástica de Momentos", método desarrollado por Horne, de Cambridge, y Morley, de U.S.A., independientemente siendo tal procedimiento útil en el "Diseño Plástico".

$$3. \sum M_{ik} = 0$$

$$4. \sum M_{ki} = 0$$

$$\text{Llamando } K_{fik} \theta_{ik} C_{fik} = M_{IRki}$$

$$K_{fki} \theta_{ki} C_{fki} = M_{IRik}$$

(M<sub>IRki</sub> = Momento inducido rotacional en k<sub>i</sub>)

(M<sub>IRik</sub> = Momento inducido rotacional en i<sub>k</sub>)

De ecuaciones 1 y 3, obtenemos :

$$5. \theta_{ik} = -\sum (M_{fik} + M_{IRik}) / \sum K_{fik}$$

De ecuaciones 2 y 4, obtenemos :

$$6. \theta_{ki} = -\sum (M_{fki} + M_{IRki}) / \sum K_{fki}$$

Sustituyendo en 1 y 2 los valores de  $\theta_{ik}$  y  $\theta_{ki}$  y los de M<sub>IRki</sub> y M<sub>IRik</sub>, obtenemos :

$$7. M_{ik} = M_{fik} - D_{ik} \sum (M_{fik} + M_{IRik}) + M_{IRik}$$

$$8. M_{ki} = M_{fki} - D_{ki} \sum (M_{fki} + M_{IRki}) + M_{IRki}$$

Estas ecuaciones 7 y 8 son las homólogas en el método de distribución de momentos con las del método "Slope deflection".

#### Método de Cross :

Si en el piso considerado hubiere columnas con extremos lejanos restringidos o libres (gozne) en vez de la fijación asumida inicial, bien puede incluirse para el cálculo de los factores de distribución, lo que hemos llamado el método clásico de Cross : así :

$$M_{ik} = M_{fik} - D'_{ik} \sum (M_{fik} + M_{IRik}) + M_{IRik}$$

$$M_{ki} = M_{fki} - D'_{ki} \sum (M_{fki} + M_{IRki}) + M_{IRki}$$

$$\text{Siendo } D'_{ik} = K_{fik} / \sum K'_{ik}; \quad D'_{ki} = K_{fki} / \sum K'_{ki}$$

Tradicionalmente se ha aplicado el método de Cross con cálculo cíclico a través de aproximaciones sucesivas. Sin embargo, es posible simplificar el procedimiento si se calcula un momento inducido tal que agote la convergencia pero sin distribuir sino hasta el final, dejando una junta totalmente fija hasta esa oportunidad.

Este procedimiento lo ha utilizado KANI (Referencia 5) en su obra (primera parte).

La idea anterior debe haber nacido con una nueva disposición de las ecuaciones 7 y 8 que reescribiremos aquí :

$$7. M_{ik} = M_{fik} + M_{IRik} - D_{ik} \sum (M_{fik} + M_{IRik})$$

$$8. M_{ki} = M_{fki} + M_{IRki} - D_{ki} \sum (M_{fki} + M_{IRki})$$

## DISTRIBUCION DE UN CICLO

Hickerson T.F. (Referencia 4 páginas 7 a 35) expone un método con rigideces corregidas (extremos lejanos restringidos) y factores de fijación. Lo mismo T. Y. Lin (a través de la referencia de E. Lightfoot #7) idea una distribución directa -numérica- con rigideces actuales o corregidas y unos términos que llama coeficientes de transmisión "b" que converge, en este tipo de estructuras de un piso (sin lado), en un ciclo de operaciones.

Realmente es el mismo procedimiento que el de Hickerson, ya que el factor de fijación de Hickerson y el coeficiente de transmisión de Lin están unidos por la siguiente ecuación :

$$9. \quad b_{ik} = (1 - f_{ik}) c_{fik}$$

De ahí que se pueden obtener unas nuevas expresiones para los momentos finales en un piso sin movimiento lateral, incluyendo estas ideas de Hickerson y de Lin con un ciclo de operaciones :

$$10. \quad M_{ik} = M_{fik} + M_{irik} - D^n ik \sum (M_{fik} + M_{irik})$$

$$11. \quad M_{ki} = M_{fki} + M_{irki} - D^n ki \sum (M_{fki} + M_{irki})$$

Rigidez absoluta con extremo lejano restringido:

Conocida por Lin como rigidez actual. (Referencia #7 página 198).

Fórmula :  $S_{ik} = K_{fik} (1 - C_{fik} C_{fki} g_{ki})$

$$g_{ki} = \frac{K_{fki}}{K_{fki} + R_{ki}}$$

$R_{ki}$  = suma de rigideces actuales de los miembros concurrentes al extremo lejano  $ki$  excepto la rigidez del mismo miembro :

$$R_{ki} = \sum S_{ki} - S_{ki}$$

En la referencia #2 está el desarrollo completo de las relaciones algebraicas entre el método Cross y la distribución de un ciclo. De esa referencia tomamos las siguientes fórmulas :

$$g_{nik} = \frac{D'_{nik}}{1 - U^{(n-1)} J^{(n-1)} ik} = D'_{nik} J_{nik}$$
$$J_{nik} = \frac{1}{1 - U^{(n-1)} J^{(n-1)} ik} = \frac{1}{1 - \frac{U^{(n-1)}}{1 - \frac{U^{(n-2)}}{1 - \frac{U^{(n-3)}}{\dots}}}}}$$

etc.

Siendo  $U_n = D'_{nik}D'_{nki}CF_{nik}CF_{nki}$

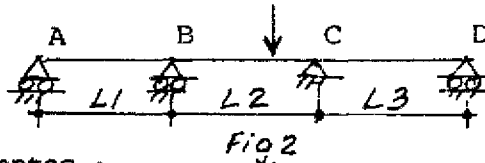
Este término  $U$  aparece también en la referencia #1 páginas 201 y 202 en donde Borg y Gennaro dan la solución general de la viga continua de tres tramos con momento de inercia variable utilizando suma de términos de series geométricas. Otro término usual es el producto de  $U_n * J_{nik} * J_{nki} = t_n$ , entonces la expresión de factor de distribución actual es :

$$D''_{nik} = \frac{g_{nik} - t_n}{1 - t_n} \quad ; \quad 1 - D''_{nik} = \frac{1 - g_{nik}}{1 - t_n}$$

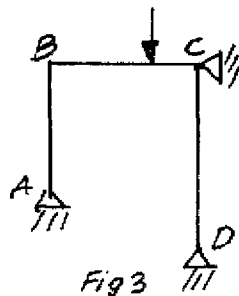
con estos términos así definidos se puede aplicar la distribución algebraica de un ciclo a estas estructuras, de un piso de sección variable con movimiento lateral prevenido. Su aplicación será mejor comprendida con un ejemplo :

Problema :

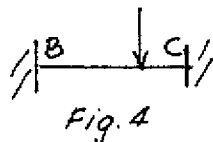
Dar la solución general de una viga continua de tres tramos con momento de inercia variable con carga en el tramo central.



Estructuras equivalentes :



marco rígido  
sin movimiento lateral



viga l luz con  
apoyos restringidos

Solución a la estructura planteada usando viga de una luz con apoyos restringidos como estructura equivalente :

Extremo  $i_k$

Extremo  $k_i$

$$\begin{aligned} J_{ik} &= 1 \\ D''_{ik} &= (D_{ik} - U)/1 - U \\ 1 - D''_{ik} &= (1 - D_{ik})/1 - U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{ki} &= 1 \\ D''_{ki} &= (D_{ki} - U)/1 - U \\ 1 - D''_{ki} &= (1 - D_{ki})/1 - U \end{aligned}$$

M Fijos : -MFik +MFki  
inducción : -MFkigkiCFki; +MFikgikCFik

Distribución : +(MFik + MFkigkiCFki)D<sup>ik</sup> - (MFki + MFikgikCFik)D<sup>ki</sup>

Suma : -Mik=(MFik + MFkigkiCFki)(1-D<sup>ik</sup>) Mki=(MFki + MFikgikCFik)(1-D<sup>ki</sup>)

Sabiendo que : D<sup>ik</sup> = Dik; D<sup>ki</sup> = Dki  
gik = Dik; gki = Dki  
1-D<sup>ik</sup> = (1-Dik)/1-U  
1-D<sup>ki</sup> = (1-Dki)/1-U

Resulta : Mik = (MFik + MFki Dki CFki)(1-Dik)/1-U  
Mki = (MFki + MFik Dik CFik)(1-Dki)/1-U

Signos de rotación : Cargas gravitacionales)

Comentario sobre el problema resuelto :

En la referencia usan momentos fijos ambos positivos. En nuestro caso utilizamos cargas gravitacionales con la notación estándar de rotación, sin embargo los valores absolutos coinciden siendo la metodología escogida un acierto.

Reconocimientos :

A mi señora esposa, Rosa María, por su abnegada colaboración y comprensión; a la señora Annelina Hovenga por la labor mecanográfica de la pasada del manuscrito.

REFERENCIAS

1. Borg S. y Gennaro J. : ANALISIS ESTRUCTURAL AVANZADO  
Cía. Ecsa, México, 1962
2. Castro J. : APUNTES ESTRUCTURALES  
Inédito (1975-1988)
3. Gere J.M. : MOMENT DISTRIBUTION  
D.V. Nostrand Co., U.S.A., 1963
4. Hickerson T.F. : STATICALLY INDETERMINATE FRAMEWORKS  
U.N., Carolina, U.S.A., 1949
5. KANI ANALYSIS OF MULTI STORY FRAMES  
F.U. Publishing Co., Alemania, 1957
6. Kinney, J.S. : ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS  
Cecsa, México, 1960

7. Lightfoot E. : MOMENT DISTRIBUTION  
J. Wiley & Sons, U.S.A., 1961
8. P.C.A. : CONTINUOUS CONCRETE BRIDGES  
Portland Cement Association, U.S.A., 2a. Ed.
9. P.C.A. : HANDBOOK OF FRAME CONSTANTS  
Portland Cement Association, U.S.A., 1947
10. Wang Ch. : STATICALLY INDETERMINATE STRUCTURES  
McGraw H. Co., U.S.A., México, 1965

#### ANEXO A

#### CALCULO DE CONSTANTES ELASTICAS EN VIGAS ACARTELADAS PARABOLICAS A MITAD DE LA LUZ (Referencia #2)

Computadora Personal FX-850P (Casio)  
Lenguaje BASIC  
Programa #P5-JCV-88

#### TRANSCRIPCION DE LA EDICION :

```

5      PRINT "VIGAS/LOSAS ACARTELADAS"
6      PRINT "PARABOLICAS/MEDIA LUZ"
10     PRINT "PROGRAMA #P5-JCV-88"
12     REM COEF/FACTORES ELASTICOS
13     REM Y COEF/MOMENTOS FIJOS
15     V1=0 : V2=0 : V3 = 0 : V4 = 0 : V5 = 0
16     Y1 = 0 : Y2 = 0 : Y3 = 0 : Y4 = 0 : Y5 = 0
18     SET F3
20     INPUT "m"; M, "rA";A,"rB"; B
25     FOR N = 1 TO M
30     J = N - .5
35     H = J/N
40     P = (M-J)/M
42     IF H = <1/2 THEN I1 = 0 ELSE I1 = 1
60     D = (1-2*H)^2
65     E = (1+A*D)^3*(1-I1)
70     F = (1+B*D)^3*I1 + E
75     R0 = P/(F*M)
80     T0 = H/(F*M)
85     U1 = P
90     U2 = H

```

```

95      U3 = P*H/2
100     U4 = 1/48*P-(1-I1)/3*(1/2-H)^4
105     U5 = 1/48*H-I1/3*(H-1/2)^4
110     R1 = R0*U1
115     T1 = T0*U1
120     R2 = R0*U2
125     T2 = T0*U2
130     R3 = R0*U3
135     T3 = T0*U3
140     R4 = R0*U4
145     T4 = T0*U4
150     R5 = R0*U5
155     T5 = T0*U5
160     V1 = V1+R1
165     Y1 = Y1 + T1
170     V2 = V2 + R2
175     Y2 = Y2 + T2
180     V3 = V3 + R3
185     Y3 = Y3 + T3
190     V4 = V4 + R4
195     Y4 = Y4 + T4
200     V5 = V5 + R5
205     Y5 = Y5 + T5
210     NEXT N
215     C1 = V2/Y2; C2 = Y1/V1
220     K1 = 1/((1-C1*C2)*V1)
225     K2 = 1/((1-C1*C2)*Y2)
230     X3 = K1*(V3 - C1* Y3)
235     Z3 = K2*(Y3-C2*V3)
240     X4 = K1*(V4-C1*Y4)
245     Z4 = K2*(Y4-C2*V4)
250     X5 = K1*(V5-C1*Y5 )
255     Z5 = K2*(Y5-C2*V5)
260     PRINT "CFik"; C1, "CFki"; C2
265     PRINT "kFik"; K1, "kFki"; K2

```



```

269 PRINT "COEF/M.FIJOS/C.UNIF."
270 PRINT "mFik"; X3; "wL*L"
271 PRINT "mFki"; Z3; "wL*L"
272 PRINT "COEF/M.FIJOS/wik par."
273 PRINT "Parábola a L.C."
275 PRINT "mFik"; X4; "wik*L*L"
276 PRINT "mFki"; Z4; "wik*L*L"
277 PRINT "COEF/M.FIJOS/wki par"
278 PRINT "Parábola a L.C"
280 PRINT "mFik"; X5; "wki*L*L"
281 PRINT "mFki"; Z5; "wki*L*L"
290 REM
300 V6 = 0 : Y6 = 0 : INPUT "N"; X
305 S=X/M
325 FOR O = 1 TO M
330 J = 0-.5
335 H = J/M
340 P=(M-J)/M
342 IF H <= 1/2 THEN I1 = 0 ELSE I1 = 1
360 D= (1-2*H)^2
365 E= (1+A*D)^3*(1-I1)
370 F = (1+B*D)^3*I1 + E
375 R0 = P/(F*M)
380 T0 = H/(F*M)
442 IFH = <S THEN I2 = 0 ELSE I2 =1
505 U6 = (1-S)*H-I2*((1-S)*H-S*P)
510 R6 = R0*U6
515 T6 = T0*U6
600 V6 = V6 + R6 : Y6 = Y6 +T6
605 NEXT O
610 X6 = K1*(V6-C1*Y6)
615 Z6 = K2*(Y6-C2*V6)
619 PRINT "COEF/M.FIJOS C. PUNT."
620 PRINT "MFik="; X6; "P*L"
621 PRINT "MFki="; Z6; "P*L"
625 GOTO 300
630 END

```

**UTILIZACION DE COMPUTADORAS PERSONALES  
DE BOLSILLO COMO HERRAMIENTAS EN EL  
ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL**

por

**Ing. José Castro Vargas  
Ingeniero Civil**

**RESUMEN**

Se comenta el avance tecnológico de las calculadoras científicas programables a las computadoras personales de bolsillo que ahora usan el lenguaje BASIC. Tal adelanto ha permitido la preparación de programas de primera calidad en el análisis y diseño de superestructuras de puentes y otras estructuras en general.

Se comenta un sistema de dos programas independientes, confeccionados por el autor para el análisis de vigas simples pretensadas de puentes.

Al final del texto, se presenta la resolución de un problema de análisis de un puente, como aplicación práctica de los programas del sistema mencionado. Y en el Apéndice A se transcribe un programa.

**INTRODUCCION**

En el Seminario de Ingeniería Estructural de 1981, se hablaba de utilización de calculadoras científicas programables como herramientas en el análisis estructural. Ahora, siete años después, se ha cambiado el tema por "Utilización de computadoras personales de bolsillo como herramientas en el análisis y diseño estructural". La razón de ese cambio es el uso de un lenguaje de alto nivel : BASIC, incorporado a la nueva generación de herramientas electrónicas llamadas Computadoras Personales de Bolsillo.

Algunos fabricantes de estas obras maestras de la electrónica consideran que ellas son el producto de la más alta ingeniería electrónica, de pruebas y de control de calidad con componentes electrónicos de precisión. Aparte de estas características, algunas cuentan con un utilitario científico incorporado que suma a veces más de cien utilitarios de "software" para aplicaciones matemáticas y científicas. Se ha abierto un camino hacia el incremento de programas de primera calidad, utilizando estas herramientas electrónicas. El autor de este trabajo se ha permitido preparar varios programas para el análisis estructural de puentes, utilizando una computadora personal Fx-850 P, de la casa Casio, en lenguaje BASIC, y a continuación se comenta el sistema de dos programas, titulado :

**ANALISIS DE VIGAS SIMPLES  
PRETENSADAS DE PUENTES**

## NARRATIVO

Analiza vigas simples precoladas, pretensadas con acción compuesta de losas coladas en sitio. Calcula los esfuerzos y momentos en la sección de "máximo absoluto" y otros puntos, así como los cortantes, y el espaciamiento de estribos #3 en los nervios de vigas U invertidas. El sistema consta de dos programas independientes, # P1 y # P2, en lenguaje BASIC, adaptados a una Computadora Personal Casio Fx-850 P.

A través de iteraciones manuales se pueden obtener, además, diseños adecuados, como se demuestra con los ejemplos resueltos al final de este trabajo.

## PROGRAMA # P1 : RESUMEN DE ENTRADAS

h= altura viga (cm); to= espesor losa viga (cm)  
bo= Ancho de la viga U (cm); b1 = Ancho de nervio  
abajo (cm), (c/u); r= relación hor/vert de paredes nervio; sep= separación  
clara de vigas (cm).  
t<sub>1</sub>= espesor de entrelosa (cm); t<sub>2</sub>= espesor de sobrelosa (cm); f'co= resist.  
cóngr. viga 28 días (Kg/cm<sup>2</sup>).

f'cl= resistencia concreto losas (Kg/cm<sup>2</sup>)  
b3= Ancho diafragma Central (cm).  
w3= Peso de acera y barandas/viga (Kg/m )  
tw= Espesor de superficie de rodamiento (cm).  
Grado= Grado de acero de preesfuerzo (270/250)  
Nt= Cantidad de torones por viga.  
At= Area de 1 torón (cm<sup>2</sup>)  
e4= Espaciamiento c.a.c. torones (cm).  
L= Luz cac. apoyos puente (m).  
f'ci= Resist. del concreto al pretensar (Kg/cm<sup>2</sup>)  
H/HS= Carga viva tipo H ó HS.  
Ton= Tonelaje de c. viva : (15 ó 20).  
wc= Ancho de calzada (neto) en cm.

## RESUMEN DE SALIDAS

Ao= Area de sección sencilla viga U (cm<sup>2</sup>)  
wo= peso propio viga precolada (Kg/m).  
Y<sub>B</sub>= Ubicación C.G. de abajo (cm).  
Y<sub>T</sub>= Ubicación C.G. de arriba (cm).  
I<sub>xx</sub>= Momento de inercia sec. simple (cm<sup>4</sup>)  
S<sub>B</sub>= Módulo de Sección abajo ss (cm<sup>3</sup>)  
S<sub>T</sub>= Módulo de Sección arriba: S.Simp. (cm<sup>3</sup>)  
S<sub>T</sub>= Separación clara de vigas (cm)  
n= Relación módulos de elasticidad E1/Eo  
t1= espesor de entrelosa (cm)  
t2= espesor de sobrelosa (cm)  
w1= peso de entrelosa (Kg/m)  
w2= peso de sobrelosa (Kg/m)  
A'o= Area Sección compuesta (cm<sup>2</sup>)  
Y'B= Ubicación C'G' (compuesta) de abajo (cm).

Y'T= Ubicación C'G' (compuesta) de arriba (cm)  
 Ix'x'= Momento de inercia S. Compuesta (cm<sup>4</sup>)  
 S'B= Módulo de Sección-comp-abajo (cm<sup>3</sup>)  
 S'T= Módulo de Sección-comp-arriba (cm<sup>3</sup>)  
 MER= Momento elástico resistente (Kg-m)  
 MUR= Momento último resistente (Kg-m)  
 T6<1? = (Si T6<1 es viga rectangular)  
 w= (Si w<Ø.3Ø falla acero primero)  
 exc.= Excentricidad de C.G. torones L. Centro. (cm)  
 D<sub>f</sub>= Peso del diafragma Central (Kg.)  
 1+I= 1 + factor de impacto (máx. 1.3)  
 H/HS= Carga H ó HS  
 Ton= Tonelaje de .C. viva : 15 ó 20  
 Wc= Ancho de calzada : cm  
 FD= Factor de distribución (mín. .Ø.5)  
 U= Viga U invertida  
 h= Altura de la viga (cm)  
 Nt= Nº de torones por viga (cantidad)  
 MDØ= Momento en Ø, de peso propio (Kg-m)  
 MD1= Momento en Ø, de c. muerta (Kg-m)  
 MD2= Momento en Ø, de Sup. rodamiento (Kg-m)  
 Fi/Nt= Fuerza inicial de pretensión por torón  
 M4= Momento útil 1 Grupo 1 diseño elástico  
 M5= Momento útil 2 diseño último (H15 & HS15)  
 M6= Momento útil 3 diseño último (H20 & HS20)  
 Mcv+i= Momento de c. viva + impacto (Kg-m)  
 Mútil= El momento útil menor de diseño.  
 Mcv tabla (AASHTO) = Momento en K-pie. Tabla AASHTO  
 L= Luz pte en metros  
 Lm1 & Lm2= Luces mínimas (fTi & fBi)  
 L corta = Indica que L escogida es corta.  
 f<sub>B</sub>= Esfuerzo abajo max. (Kg/cm<sup>2</sup>)-dis. elástico  
 f<sub>B</sub> permis. = esfuerzo abajo permisible (Kg/cm<sup>2</sup>)  
 f<sub>B</sub>i= Esfuerzo abajo max. al pretensar (Kg/cm<sup>2</sup>)  
 f<sub>T</sub>i= Esfuerzo arriba max. al pretensar (Kg/cm<sup>2</sup>)  
 f<sub>T</sub>= Esfuerzo arriba max.-dis. elástico (Kg/cm<sup>2</sup>)

$f_{B_i}/f'_{ci} < .6 =$  Relación permis. de esfuerzos  
 $f_{Ti}/f'_{co} < .4 =$  Relación permis. de esfuerzos  
 H/Hs; Ton resist.= Carga viva max. resistente.  
 H/HS; Ton= Carga viva de análisis  
 $f_B$  bad = Indica que  $f_B$  es mayor que el permitido  
 $L \& f_B =$  Luz Pte. y esfuerzo abajo.  $Kg/cm^2$

### FIN PROGRAMA P 1

### PROGRAMA # P2 : RESUMEN DE ENTRADAS

$h =$  Altura viga precolada (cm)  
 $t_o =$  Espesor losa viga (cm)  
 $b_o =$  Ancho de la viga U (cm)  
 $b_l =$  Ancho de nervio, abajo (cm) c/u  
 $r =$  Hor/vert relación pendiente paredes nervio  
 $A_{\phi} =$  Area de sección sencilla ( $cm^2$ )  
 $y_B =$  Ubicación C.G. S. Sencilla abajo (cm)  
 $y_T =$  Ubicación C.G.S. Sencilla arriba (cm)  
 $D_f =$  Peso del diafragma central (Kg)  
 $I_{xx} =$  Momento de Inercia S. Simple ( $cm^4$ )  
 $Sep =$  Separación clara de vigas (cm)  
 $t_1 =$  Espesor de entrelosa (cm)  
 $t_2 =$  Espesor de sobrelosa (cm)  
 $f'_{co} =$  Resistencia del concreto viga 28 días ( $Kg/cm^2$ )  
 $f'_{ci} =$  Resistencia del concreto losas 28 días ( $Kg/cm^2$ )  
 $b_3 =$  Ancho de diafragma central (cm)  
 $w_3 =$  Peso de acera y barandas/viga (Kg/m)  
 $t_w =$  Espesor de superficie de rodamiento (cm)  
 GRADO= Grado de acero de preesfuerzo (270/250)  
 $N_t =$  Cantidad de torones por viga  
 $A_t =$  Area de 1 torón ( $cm^2$ )  
 $e_4 =$  Espaciamiento c.a.c. torones (cm)  
 Beta= Ubicación quiebre de C.G. torones  
 $L =$  Luz c.a.c. apoyos (m)  
 Alfa= Ubicación de punto cualquiera : aL  
 $H/HS =$  Carga viva tipo H ó HS  
 Ton= Tonelaje de c. viva : 15 ó 20 (Inglesas)

wc= Ancho de calzada neta (cm)  
f'y varilla= Esfuerzo de cedencia (Kg/cm<sup>2</sup>)

PROGRAMA #2 : RESUMEN DE SALIDAS

PR#2= Indica que corre programa #P2  
MER= Momento elástico resistente (Kg-m)  
MUR= Momento último resistente  
T6<1? = Si T6<1 es viga rectangular  
w= Si  $w < 0.3\phi$  falla primero acero  
exc.a= Excentricidad a "aL del apoyo"  
Df= Peso del diafragma central (Kg)  
1+I= 1+ factor de impacto  
H/HS; Ton= Carga viva & Tonelaje  
Wc= ancho de calzada (cm)  
FD= Factor de distribución  
L= Luz del puente c.a.c. apoyos (m)  
U= Viga U de altura h (cm)  
Nt= Cantidad de torones por viga  
MDØ= Momento de peso propio en aL (Kg-m)  
MD1= Momento de carga muerta en aL (Kg-m)  
MD2= Momento de c. de rodamiento en aL (Kg-m)  
Fi/Nt= Fuerza inicial por torón (Kg)  
M4= Momento útil 1 (aL) Grupo 1 diseño elástico  
M5= Momento útil 2 (aL) diseño último (H15 & HS15)  
M6= Momento útil 3 (aL) diseño último (H20 & HS20)  
Mcv+i= Momento de c. viva + impacto (aL) (Kg-m)  
Mútil = El momento útil menor de diseño en aL  
L= Luz del puente (m)  
Carga viva resistente vs. carga viva de diseño  
Wv tabla = Cortante extremo max. tabla AASHTO (Kips)  
fBi= esfuerzo abajo al pretensar -aL- (Kg/cm<sup>2</sup>)  
fTi= Esfuerzo arriba al pretensar -aL- (Kg/cm<sup>2</sup>)  
fB= Esfuerzo abajo - cargas de servicio -aL- (Kg/cm<sup>2</sup>)  
fT= Esfuerzo arriba - cargas de servicio -aL- (Kg/cm<sup>2</sup>)  
s= Separación de estribos #3 -aL- en cm.

RESUMEN DE LAS FORMULAS USADAS EN EL  
CALCULO DE MAXIMOS MOMENTOS Y CORTANTES

MOMENTOS MAXIMOS ABSOLUTOS Cv+i					
Nº	H/HS	L1 : L2	K	O	FORMULAS : Mcv+i(máx. abs)
1	H	Ø : 8.Ø8	1	Ø	$M_{cv+i} = K \cdot P \cdot C9 / L \cdot (L/2 - O \cdot U)^2$ $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$
2	H	8.Ø8 : 17.29	5/4	1/1Ø	$M_{cv+i} = K \cdot P \cdot C9 / L \cdot (L/2 - O \cdot U)^2$ $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$
3	H	17.29	--	--	$M_{cv+i} = P \cdot L \cdot C9 / 4 \cdot (9/16 + L/C2)$ (Lane .L.) $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$
4	HS	Ø : 7.28	1	Ø	$M_{cv+i} = K \cdot P \cdot C9 / L \cdot (L/2 - O \cdot U)^2$ $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$
5	HS	7.28 : 1Ø.3Ø	2	1/4	$M_{cv+i} = K \cdot P \cdot C9 / L \cdot (L/2 - O \cdot U)^2$ $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$
6	HS	1Ø.3Ø : 44.14	9/4	1/6	$M_{cv+i} = (K \cdot P / L \cdot (L/2 - O \cdot U)^2 - P \cdot U / 4)$ $M_{cv+i} = (M_{cv+i}) \cdot C9$ $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$
7	HS	44.14	--	--	$M_{cv+i} = P \cdot L \cdot C9 / 4 \cdot (9/16 + L/C2)$ (LANE .L.) $M_{cv(tabla)} = M_{cv+i} / C3$

RESUMEN DE FORMULAS USADAS

MOMENTOS Y CORTANTES MAX. DE C. VIVA + IMPACTO EN ALFA L.  
(Vcv(Tabla AASHTO para alfa = 0))

Nº	H/HS	L1 : L2	K	O	FORMULAS
8	H	$\emptyset : U/(1-A)$	1	$\emptyset$	$V_{cv+i} = K * P * C9 * Y / (J * L)$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * (L * (1-A) - 2 * O * U)$ $M_{cv+i} = V_{cv+i} * A * L * J / Y$ $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C6$ (PRINT si A=0)
9	H	$> U/1-A$	5/4	1/10	$V_{cv+i} = K * P * C9 * Y / (J * L)$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * (L * (1-A) - 2 * O * U)$ $M_{cv+i} = V_{cv+i} * A * L * J / Y$ $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C6$ (Print si A=0)
10	H	$> U/1-A$	--	--	$M_{cv+i} = P * C9 * L * A * (1-A) * (9/16 + L/C2)$ (Si $M_9 < M10$ )
11	H	$> U/1-A$	--	--	$V_{cv+i} = (13/16 * (1-A) + 2 * L / C2 * (1/2 - A))$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * P * C9$ (Si $V_9 < V11$ ) $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C7$ (Lane L.)
12	HS	$\emptyset : \frac{U}{1-A}$	1	$\emptyset$	$V_{cv+i} = K * P * C9 * Y / (J * L)$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * (L * (1-A) - 2 * O * U)$ $M_{cv+i} = V_{cv+i} * A * L * J / Y$ $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C6$ (Print si A=0)
13	HS	$\frac{U}{1-A} : \frac{2 * U}{1-A}$	2	1/4	$V_{cv+i} = K * P * C9 * Y / J * L$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * (L * (1-A) - 2 * O * U)$ $M_{cv+i} = V_{cv+i} * A * L * J / Y$ $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C6$ (Print si A=0)
14	HS	$> \frac{2 * U}{1-A}$	9/4	1/3	$V_{cv+i} = K * P * C9 * Y / (J * L)$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * (L * (1-A) - 2 * O * U)$ $M_{cv+i} = V_{cv+i} * A * L * J / Y$ $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C6$ (Print si A=0)
15	HS	$> \frac{2 * U}{1-A}$	--	--	$M_{cv+i} = P * C9 * L * A * (1-A) * (9/16 + L/C2)$ (Si $M14 < M15$ )
16	HS	$> \frac{2 * U}{1-A}$	--	--	$V_{cv+i} = (13/16 * (1-A) + 2 * L / C2 * (1/2 - A))$ $V_{cv+i} = V_{cv+i} * P * C9$ (Si $V14 < V16$ ) $V_{cv}(tabla) = V_{cv+i} / C7$ (PRINT si A=0)



## EJEMPLO DE APLICACION PR # P1 & # P2

Problema : Analizar vigas U7 0 (viga ficticia de 70 cm de alto; 10 cm de espesor de losa; nervio uniforme de 12 cm) en puente de 13.92 m de luz con apoyos, en una superestructura de 4 vigas separadas 25 cm claro, con un ancho de calzada de 395 cm, para una carga viva HS15, el ancho del diafragma central: 25 cm, la entrelosa de 10 cm, sin sobrelosa; la superficie de rodamiento futuro equivalente a 1 cm de concreto: El peso de rodapie y barandas estimado en 20Kg/m por viga. El concreto a utilizar : clase D en viga ( $f'_{co}=350$ ); clase B en losas coladas en sitio y diafragma con  $f'_{cl}=280$  Kg/cm<sup>2</sup>; el tensado se haría cuando la resistencia del concreto fuera no menor a  $f'_{ci}=280$  Kg/cm<sup>2</sup>.

### RESULTADOS

#### PROGRAMA #P 1 :

ENTRADAS : h=70; bo=80; to=10; bl=12; r=0; sep=25; t1=10; t2=0;  $f'_{co}=350$   
 $f'_{cl}=280$ ; b3=25; w3=20; tw=1; GRADO=270; Nt=10; At=0.99;  
e4=4; L=13.92;  $f'_{cl}=280$ ; H/HS=HS; Ton=15; Wc=395

SALIDAS : U70; Ao=2240; wo=537.60; yB=42.50, yT=27.50; Ixx=1068666.67;  
SB=25145.10; ST=38860.61; sep=25; n=0.89; t1=10; t2=0; w1=60.00  
w2=0; A'co=2463.61; y'B=44.54; y't=25.46; Ix'x'=1173456.43;  
S'B=26344.83; S'T=46094.16; MER=51654.00; MUR=94249.60; T6=0.67  
ok; w=0.08 ok; exc.  $\phi=30.50$ ; Df=277.02; 1+I=1.29; HS15; Wc=  
395.00; FD=0.69 U70.00; Nt=10; MDO=13021.10; MD1=15922.80;  
MD2=610.36; Fi/Nt=13155.36; M4=34361.13; M5=25439.33; M6=  
33512.89; MCV+i(max. abs.)=25431.42; Mútil=25439.33; MCVtabla  
AASHTO=412.97 Kips-pie; L=13.92; Lm1 & Lm2:13.44 & 13.72 ok.  
fB=4.15; fBperm.=-29.75 Ok.; fBi=166.51; fTi=-11.01; FT=63.55;  
fBi/f'ci < .6?=0.59 ok; FT/f'co < .4?=0.18 ok; HS/15 HS/15 ok  
L & fB : 13.92 4.15

#### PROGRAMA #P 2 :

ENTRADAS :  
(Nuevas) Beta: 0.25  
f'y=2800  
alfa=0.20

SALIDAS : ea=26.90; MER=47873.51;  
MUR=87548.17; T6 < 1?=0.66 ok.  
w=0.09 ok. ex.a=26.90  
Df=277.02 1+I=1.29; HS15;  
Wc=395.00 : FD=0.69; L=13.92  
U70; Nt=10.00; MDO=8333.51; MD1=9959.22; MD2=390.63; Fi/Nt=  
13155.36; M4=37048.48; M5=25906.77; M6=34128.68; MCV+i=18091.52;  
Mútil=25906.77; L=13.92; HS21.48 vs HS15.00 ok.  
Pv tabla AASHTO:V=32.16 Kips  
fBi=166.32; fTi=-10.89; fB=42.21  
FT=41.09; Estribos#3@ 33.49

FIN

## RECONOCIMIENTOS :

A mi esposa, Rosa María, por su abnegada colaboración y comprensión. A los Ingenieros del Departamento de Diseño de Puentes del MOPT por sus comentarios y revisión de algunas fórmulas.

## BIBLIOGRAFIA

1. AASHTO : COMPUTER SYSTEM INDEX  
Washington, D.C., U.S.A., 1981
2. AASHTO : SPECIFICATIONS FOR HIGHWAY BRIDGES, 1983
3. Arias, F. : INTRODUCCION A LA TECNICA DE INVESTIGACION.  
Editorial Trillas, México, 1975
4. BCEOM-Conarsud : INTRODUCCION A LA COMPUTACION  
Ing, Alberto González, C.R., 1980
5. CASIO : MANUAL DEL PROPIETARIO/COMPUTADORA PERSONAL FX-850P  
Japón, 1988
6. COUGER & SHANNON : INTRODUCCION AL LENGUAJE FORTRAN  
Edit. Ateneo, Argentina, 1975
7. KOFFMAN &  
FRIEDMAN : BASIC : INTRODUCCION AL LENGUAJE  
Addison, U.S.A., 1987
8. LEONHARDT, F. : PRESTRESSED CONCRETE DESIGN  
Wilhem, Alemania, 1964
9. LIN, T.Y. : DESIGN OF PRESTRESSED CONCRETE STRUCTURES  
J. Wiley, U.S.A., 1963
10. MOPT : ESPECIFICACIONES GENERALES C.R. 77  
Dirección de Vialidad, Costa Rica, 1978
11. SEELYE, E. : DESIGN, VOL. 1,  
J. Wiley, U.S.A., 1955
12. SUTHERLAND &  
BOWMAN : STRUCTURAL THEORY  
J. Wiley & Sons Inc., U.S.A., 1961
13. Castro, J. : APUNTES ESTRUCTURALES  
Inédito (1975-1988)

APENDICE A

ANALISIS DE VIGAS "Uinv" SIMPLES PRETENSADAS  
DE PUENTES DE CARRETERAS

Programa #P 2-Jcv-88

Computadora Personal FX-850P (Casio)

Lenguaje : BASIC

Transcripción de la Edición

```
ON
MODE 1 EXE
S 2 EXE
EDIT EXE

5 PRINT "PR#P2/Jcv-88"
9 REM AASHTO 83/Di=cm:L=m:M=Kg-m
15 INPUT "h"; H, "BØ"; BØ, "TØ"; TØ
20 INPUT "B1"; B1, "R=hor/vert"; R
25 INPUT "AØ"; AØ, "yB"; yØ, "yT"; y1
3Ø INPUT "Df"; DØ
35 INPUT "Lxx"; IØ
4Ø WØ=.24*AØ; SET F2
45 SØ=IØ/yØ:S1=IØ/y1
5Ø INPUT "Sep"; E1
55 INPUT "T1"; T1, "T2"; T2
6Ø INPUT "f'co"; FØ, "f'cl"; F1
65 N= SQR(F1/FØ) : B2=E1 + BØ
7Ø A1 = E1*T1*N : D1 = H-T1/2
75 A2= B2*T2*N : D2 = H + T2/2
8Ø A3 = AØ+A1+A2
85 W1= E1*T1*.24 : W2 = B2*T2*.24
9Ø y2= (AØ*yØ+A1*D1+A2*D2)/A3
95 y3= H-y2
1ØØ E5=y3-T1/2 : E6=y3+T2/2
1Ø5 I4= IØ+AØ*((y2-yØ) ^ 2)
11Ø I5 = E1*(T1 ^ 3) + B2*(T2 ^ 3)
115 I6= A1*(E5 ^ 2) + A2*(E6 ^ 2)+I4
12Ø I6= I6 + I5*N/12
```

```

125      S2=I6/y2 : S3 = I6/y3
130      INPUT "B3"; B3, "w3"; W3
135      INPUT "t3"; T3
140      W4 = B2*T3*.24
145      W5 = W0+W1+W2+W3
150      INPUT "GRADO"; Q4, "Nt"; T4
155      INPUT "At"; A4, "E4"; E4
160      cφ= .4536 : c4 = 2.54^2
165      F3=Q4*1000* cφ/c4
170      F4= F3*.7*A4
175      F5= F4-45000* cφ*A4/c4
180      Eφ= yφ-4-E4/2*(T4/2-1)
185      T5 = yφ-(H-T1)/2
190      F2 = -1.59*SQR(Fφ)
195      INPUT "Beta"; B7
200      INPU "L"; L,, "alfa"; A7
205      IF A7 > B7 THEN 220
210      T7 = Eφ-(Eφ-T5)*(1-A7/B7)
215      GOTO 225
220      T7 = Eφ
225      A5= T7/S1-1/Aφ : A6 = T7/Sφ+1/Aφ
230      I9= F5*T4*A6 : S7 = 1-A7
235      M3=(I9 - F2)*S2/100
240      IF T2 < > φ THEN 250
245      B4 = B2*N+Bφ*(1-N) : GOTO 255
250      B4 = B2*N
255      D3 = Y1 + T7 + T2
260      D5 = T4*A4/(B4*D3)
265      F7 = F3*(1-D5*F3/Fφ)
270      W6 = D5*F7/Fφ
275      T6 = 1.4*D3*W6/(Tφ+T2)
280      D7 = 1-.6*W6)
285      M7 = A4*T4*F7*D3*D7/100
290      PRINT "MER"; M3, "MUR"; M7
295      PRINT "T6 < 1?"; T6, "w < .3?"; W6
300      PRINT "exc.a"; T7, "Df"; Dφ

```

```

485      PRINT "U"; H; "Nt"; T4
490      PRINT "MD0"; M0, "MD1"; M1
495      PRINT "MD2"; M2
500      PRINT "Fi/Nt"; F4, "M4"; M4
505      PRINT "M5"; M5, "M6"; M6
510      E9 = U/S7 : C9 = T8*J*J/2
515      Y9 = (S7*L + 53.34)/(S7*L + 38.1)
520      IF H$ < > "H" THEN 540
525      IF L > E9 THEN 535
530      K = 1 : 0 = 0 : GOTO 565
535      K = 5/4 : 0 = .1 : GOTO 565
540      IF L > E9 THEN 550
545      K = 1 : 0 = 0 : GOTO 565
550      IF L > (2*E9) THEN 560
555      K = 2 : 0 = 1/4 : GOTO 565
560      K = 9/4 : 0 = 1/3
565      D9 = K*P*C9*Y9(J*L)
566      D9 = D9*(L*S7 - 2*0*U)
570      Z9 = D9*A7*L*J/Y9
575      S9 = A7*S7*P*C9*L
580      S9 = S9*(9/16 + L/C2)
585      B9 = 13/16 * S7
590      B9 = (B9 + 2*L/C2*(.5-A7))*P*C9
595      IF S9 > Z9 THEN 605
600      M9 = Z9 : GOTO 610
605      M9 = S9
610      PRINT "Mcv+i"; M9, "Mutil"; M8
615      PRINT "1 + I"; J, "L"; L
616      IF B9 > D9 THEN 625
620      V9 = D9 : V8 = V9*C1*J/(C3*y)
621      GOTO 630
625      V9 = B9 : V8 = V9*C1/C3
630      PRINT "Vcv+i"; V9, "1 + Iv"; y9
635      IF A7 < > 0 THEN 645
640      PRINT "Vvtabla="; V8; "Kips"
645      A9 = M8*X/M9

```

```

650 PRINT HS; A9; HS; X
655 F8 = F4*T4*A6-M0*100/S0
660 T9 = 100*(M1/S1 + (M2 + M9)/S3)
661 F9 = C5 - (M2 + M9)*100/S2
665 T9 = T9 - F5*T4*A5
670 PRINT "fBi"; F8, "fTi"; F6
675 PRINT "fB"; F9, "fT"; T9
680 Z1 = 2*(B1 + H*R)
685 Z4 = .8*H
690 Z0 = F5*T4*(E0-T5)/(B7*L)
695 V6 = 1.3 * (V1 + V2) + 2.86*V9
700 V7 = 1.3 * (V1 + V2) + 2.171 * V9
705 Z6 = 1.3 * (M1 + M2) + 2.86 *M9
710 Z7 = 1.3 * (M1 + M2) + 2.171 * M9
715 IF X <> 15 THEN 725
720 Z8 = Z6 : V4 = V6 : GOTO 730
725 Z8 = Z7 : V4 = V7
730 T6 = F2/10 * Z1 * Z4 + V1 + V2
735 T6 = T6 + V4 * M4/Z8
740 T7 = F2 * 3.5/6 + .3 * F5 * T4/A0
745 T7 = T7 * Z1 * Z4 + Z0
750 IF T6 < T7 THEN 760
755 V5 = T7 : GOTO 770
760 V5 = T6
765 INPUT "fy varilla"; W6
770 S8 = 4 * .71 * W6 * Z4/(V4/.9-V5)
775 PRINT "ESTRIBOS # 3@ "; S8
780 GOTO 200
800 END

```

APENDICE "B" (Programa #P2-JCV-88)

ALGORITMO:

INICIO

LECTURA #1:

Datos primarios, geometría,  
resistencias del concreto y acero

LECTURA #2:

Luz del puente,  
ubicación del punto "aL"

IMPRIMIR #1:

Momentos resistentes,  
es viga rectangular ?,  
falla primero el acero ?

LECTURA #3:

Carga viva de diseño,  
ancho de vía (calzada neta )

IMPRIMIR #2:

Factor de distribución,  
momentos de carga muerta,  
fuerza de pretensado por torón,  
momento útil-(cargas de servicio),  
momento útil-(diseño último/H15,HS15),  
momento útil-(diseño último/H20,HS20),  
momento máximo carga viva más impacto,  
cortante máximo carga viva más impacto,  
cortante carga viva -tabla AASHTO- si  $a=0$ ,  
esfuerzos unitarios,  
separación de estribos #3 en nervios viga U

VOLVER A LECTURA #2:

( Sólo si fuese necesario iterar a mano).

FIN

JCV/jcv

DIAGRAMA DE FLUJO

